

INSTABILITES DE ZONES DE DIFFUSION THERMIQUE INSTATIONNAIRES EN MILIEU POREUX*

MICHEL QUINTARD et LAURENT PROUVOST

Université de Bordeaux I, Laboratoire de Mécanique Physique, E.R.A. CNRS No. 769, 351 cours de la
 Libération, 33405 Talence Cedex, France

(Reçu le 21 avril 1981)

Résumé—L'étude de la stabilité de zones de diffusion thermique instationnaires dans une couche poreuse horizontale ou dans un milieu semi-infini, confiné ou non par des parois adiabatiques verticales, est effectuée par la méthode de l'énergie, dans le cas où les fluides satisfont aux approximations de Boussinesq. Le critère de stabilité est alors calculé par la méthode de Galerkin. Les instabilités envisagées sont du type Rayleigh-Bénard et Saffman-Taylor dues respectivement aux variations de la masse volumique et de la viscosité du fluide avec la température. L'effet d'un déplacement vertical à vitesse constante, à nombre de Péclet faible, est étudié dans le cas du milieu semi-infini, éventuellement confiné par des parois adiabatiques cylindriques.

NOMENCLATURE

<p>a, nombre d'onde d'une perturbation élémentaire;</p> <p>d, diamètre;</p> <p>g, accélération de la pesanteur;</p> <p>Ga, nombre de Gay-Lussac $= 1/\beta\theta \Delta T$;</p> <p>H, hauteur de la couche poreuse;</p> <p>k, perméabilité;</p> <p>L, longueur caractéristique;</p> <p>\mathbf{n}, vecteur normal;</p> <p>p, pression;</p> <p>Pe^*, nombre de Péclet $= v(\rho c)_f U_0 L/\lambda^*$;</p> <p>$Ra^*$, nombre de Rayleigh $= (\rho c)_f k g \rho_m \beta \theta \Delta T L/\lambda^* \eta_m$;</p> <p>$R_M^*$, $= Ra^* + \gamma \Delta T Pe^*$;</p> <p>$R_M$, $= \sqrt{(R_M^*)}$;</p> <p>R_λ, cf. équation (27);</p> <p>t, temps;</p> <p>T, température;</p> <p>\mathbf{u}, perturbation de vitesse $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$;</p> <p>$\mathbf{U}$, vitesse interstitielle moyenne;</p> <p>x, y, z, coordonnées dans un repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.</p> <p>Symboles grecs</p> <p>β_{th}, coefficient d'expansion thermique volumique du fluide;</p> <p>γ, coefficient de variation de la viscosité dynamique du fluide saturant avec la température;</p> <p>ΔT, $T_2 - T_1 > 0$;</p> <p>v, porosité;</p> <p>ζ, pas de discrétisation;</p> <p>η, viscosité dynamique du fluide;</p>	<p>λ^*, conductivité thermique équivalente du milieu poreux;</p> <p>λ, paramètre de couplage [cf. équation (25)];</p> <p>π, introduit dans (30) tel que $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi \, d\Omega = 0$;</p> <p>$\rho$, masse volumique;</p> <p>(ρc), chaleur volumique à pression constante;</p> <p>ω, perturbation de pression;</p> <p>θ, perturbation de température;</p> <p>$\hat{\theta}$, $= \sqrt{\lambda} \sqrt{(R_M^*)} \theta$.</p> <p>Notations mathématiques</p> <p>$\langle f \rangle$, $= \int_{\Omega} f \, d\Omega$;</p> <p>$\operatorname{erf} x$, $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) \, du$.</p> <p>Indices</p> <p>0, déplacement de base;</p> <p>1, 2, caractéristiques du fluide à T_1 ou T_2;</p> <p>*, milieu poreux;</p> <p>c, critique;</p> <p>f, fluide;</p> <p>m, moyen [exemple $T_m = (T_1 + T_2)/2$];</p> <p>r, référence;</p> <p>ad, adimensionnel.</p> <p style="text-align: center;">INTRODUCTION</p> <p>LE DÉVELOPPEMENT de certaines études à la fois théoriques et expérimentales sur la récupération assistée du pétrole, voire la gazéification <i>in situ</i> du charbon, a montré l'importance que revêt la possibilité d'apparition d'instabilités au cours de déplacements miscibles en milieu poreux. De tels déplacements, pouvant correspondre à des zones de diffusion-dispersion au</p>
--	---

* An English version of this paper is available from the authors.

sein desquelles existe un gradient thermique ou un gradient de concentration, se rencontrent également dans un grand nombre de situations pratiques en géologie, stockage d'eau chaude en aquifère et génie chimique.

Une première approche, considérant l'importance des instabilités du type Saffman–Taylor, c'est-à-dire le développement de "digitations" de la zone de mélange, dû au seul contraste des mobilités des deux fluides en présence, a donné lieu à de nombreux travaux proposant divers modèles des déplacements avec digitations. Ces résultats concernent exclusivement à notre connaissance des déplacements miscibles à gradient de concentration. Koval [1] puis Dougherty [2] appliquent le modèle de déplacement non miscible de Buckley–Leverett au déplacement miscible avec digitations en faisant intervenir un facteur tenant compte du contraste des viscosités et éventuellement des hétérogénéités du milieu poreux. Scheidegger [3] et plus récemment Nguyen et Bagster [4] ont proposé d'autres corrélations plus satisfaisantes basées sur des modèles simples de déplacement, toujours du type "piston", c'est-à-dire où les effets de la dispersion n'apparaissent pas, les zones de diffusion étant supposées d'épaisseur nulle. Ces modèles tentent de fournir des indications sur l'efficacité des déplacements réalisés, par exemple le taux de récupération de l'huile en place dans le cas de la récupération assistée du pétrole. Les conditions d'apparition des instabilités ainsi que les phénomènes liés aux caractéristiques géométriques du déplacement, mis en évidence par certains résultats expérimentaux [5] ne sont pas pris réellement en compte.

L'approche générale à partir des équations de transfert en milieu poreux fait intervenir tout à la fois les contrastes de masse volumique et viscosité conduisant à des instabilités du type Rayleigh–Bénard et Saffman–Taylor; les critères de stabilité sont définis à partir d'un nombre de Rayleigh et d'un nombre de Péclét couplés par l'effet de la variation de la viscosité en fonction de la température ou de la concentration. Des résultats ont déjà été obtenus, relatifs aux critères d'apparition des instabilités dans le cas d'une couche poreuse horizontale traversée par un écoulement uniforme et soumise à un gradient de température stationnaire [6–8], à l'aide des méthodes classiques en convection naturelle. Wooding [9] avait déjà effectué une étude similaire dans le cas d'un milieu semi-infini.

L'étude de stabilité pour des déplacements de base instationnaires et unidimensionnels a été largement développée dans le cas de la convection naturelle dans des couches fluides horizontales soumises à un brusque changement des conditions aux limites. Lick [10] et Currie [11] tentent de définir les conditions d'apparition des instabilités en considérant le déplacement de base instationnaire comme quasi-statique. Gresho et Sani [12], Foster [13–15] et Mahler, Schechter et Wissler [16], développent une approche consistant à linéariser les équations aux perturbations, puis à résoudre un problème aux conditions initiales permet-

tant de définir l'amplification de perturbations données. Une méthode similaire a été appliquée par Bachu et Dagan [17] au cas d'un déplacement d'un fluide froid par un fluide chaud dans un milieu d'extension verticale infinie confiné latéralement par des parois adiabatiques.

Une autre approche, évitant les difficultés dues à la définition de l'apparition de l'instabilité et à l'influence du choix de la forme des perturbations initiales, consiste en une extension de la méthode de l'énergie développée par Joseph [18], aux problèmes avec déplacement de base instationnaire, Homsy [19].

Les méthodes développées dans le cas de la convection naturelle ont été appliquées par Caltagirone [20] au cas d'une couche poreuse horizontale soumise à un échelon de température à sa limite inférieure.

Le travail présenté ici constitue un développement de la méthode de l'énergie au cas de la couche poreuse et au cas d'un milieu poreux semi-infini. L'étude dans ce dernier cas, envisage l'effet d'un confinement latéral par des parois adiabatiques verticales et l'effet d'un déplacement vertical.

MODELE PHYSIQUE

Trois domaines poreux (Fig. 1) définis par les données des conditions aux limites font l'objet de cette étude:

(a) La couche Ω_H est limitée par deux plans horizontaux distants de H , Σ à la température T_2 et Σ_H à la température T_1 .

(b) Le milieu semi-infini Ω_s est délimité par la surface horizontale Σ sur laquelle:

$$\mathbf{U} = U_0 \mathbf{e}_3 \text{ et } T = T_2, \quad (t > 0). \quad (1)$$

La température tend vers T_1 lorsque z tend vers l'infini.

(c) Le domaine Ω_d correspond au milieu semi-infini complété par une paroi cylindrique verticale adiabatique et imperméable Σ_d , les conditions aux limites sur Σ_d s'écrivent alors:

$$\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2)$$

Nous utiliserons les équations classiques de transfert de chaleur et de masse en milieu poreux [21], écrites en supposant valables les approximations de Boussinesq; pour un milieu homogène et isotrope, siège d'écoulements suffisamment lents pour que la dispersion hydrodynamique n'introduise pas d'anisotropie sur le plan de la conductivité thermique, les équations s'écrivent:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla p - \rho \mathbf{g} + \varepsilon \eta k^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$(\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda^* \nabla^2 T + \varepsilon (\rho c)_T \mathbf{U} \cdot \nabla T = 0. \quad (5)$$

Les variations des caractéristiques du fluide en fonction de la température sont supposées linéaires, soit, T_r étant une température de référence que nous prendrons égale à $T_m = (T_1 + T_2)/2$

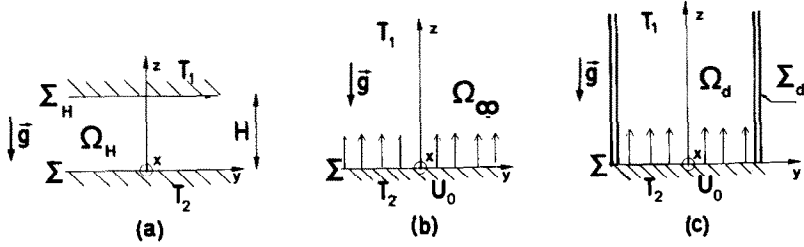


FIG. 1. Domaines poreux étudiés et conditions aux limites.

$$\rho = \rho_r [1 - \beta \text{th} (T - T_r)], \quad (6)$$

$$\eta = \eta_r [1 - \gamma (T - T_r)]. \quad (7)$$

Les équations de transfert sont écrites sous forme adimensionnelle en effectuant le changement de variables suivant :

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad t' = t \frac{\lambda^*}{L^2 (\rho c)^*},$$

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U} \frac{\varepsilon (\rho c)_f L}{\lambda^*}, \quad p' = p \frac{k (\rho c)_f}{\lambda^* \eta_r}, \quad T' = \frac{T - T_r}{\Delta T}.$$

L représente une longueur caractéristique égale à H dans le cas du domaine Ω_H et à d dans le cas du domaine Ω_d . Les équations (3) à (5) s'écrivent alors en supprimant les primes :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (9)$$

$$\nabla p - Ra^* \mathbf{e}_3 T + Ra^* Ga \mathbf{e}_3 + (1 - \gamma T \Delta T) \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T + \mathbf{U} \cdot \nabla T = 0. \quad (11)$$

Les conditions physiques des déplacements étudiés sont caractérisées par les nombres sans dimension de Rayleigh, Gay-Lussac et Péclet définis par :

$$Ra^* = \frac{(\rho c)_f k g \rho_m \beta \text{th} \Delta T L}{\lambda^* \eta_m}, \quad (12)$$

$$Ga = \frac{1}{\beta \text{th} \Delta T}, \quad (13)$$

$$Pe^* = \frac{\varepsilon (\rho c)_f U_0 L}{\lambda^*}. \quad (14)$$

DEPLACEMENT DE BASE—EQUATIONS AUX PERTURBATIONS

Nous noterons avec un indice 0 les caractéristiques des déplacements de base, solutions unidimensionnelles des équations (9) à (11) associées aux conditions aux limites définies au paragraphe 2.

Dans le cas de la couche Ω_H , initialement à température T_1 , soumise à un brusque changement de température T_2 en Σ , on étudiera la stabilité dans le cas d'un transfert de chaleur purement conductif $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$. La température adimensionnelle, $T_0(z, t)$, s'exprime alors sous la forme classique de la série de Fourier suivante :

$$T_0(z, t) = \frac{1}{2} - z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \times \sin(n\pi z) \exp(-n^2\pi^2 t). \quad (15)$$

Dans le cas des domaines Ω_r et Ω_d le déplacement de base unidirectionnel à vitesse constante ($\mathbf{U}_0 = U_0 \mathbf{e}_3$) correspond à l'injection à partir de $t = 0$ du fluide à la température T_2 dans le massif poreux saturé à la température T_1 . La température adimensionnelle dans la zone de mélange est alors déterminée par l'équation suivante :

$$T_0(z, t) = \frac{1}{2} \left\{ -\text{erf} \left(\frac{z - Pe^* t}{2\sqrt{t}} \right) + \exp(Pe^* z) \times \left[1 - \text{erf} \left(\frac{z + Pe^* t}{2\sqrt{t}} \right) \right] \right\}. \quad (16)$$

Les perturbations de l'état de base sont définies par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \quad \varpi = p - p_0, \quad \theta = T - T_0. \quad (17)$$

Les équations aux perturbations s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \theta - u_3 \frac{\partial T_0}{\partial z} - Pe^* \frac{\partial \theta}{\partial z} - \mathbf{u} \cdot \nabla \theta. \quad (19)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \varpi + R_M^* \theta \mathbf{e}_3 - (1 - T_0 \gamma \Delta T) \mathbf{u} + \gamma \Delta T \theta \mathbf{u}, \quad (20)$$

avec

$$R_M^* = Ra^* + \gamma \Delta T Pe^*. \quad (21)$$

Nous simplifions l'équation (20) de manière conforme aux approximations de Boussinesq [7], en ne perdant pas de vue que les effets "hors Boussinesq" peuvent être d'importance dans beaucoup de situations pratiques où les contrastes de masse volumique et de viscosité peuvent être très grands :

$$\mathbf{0} = -\nabla \varpi + R_M^* \theta \mathbf{e}_3 - \mathbf{u}. \quad (22)$$

Dans cette équation, les nombres de Péclet et de Rayleigh interviennent par l'intermédiaire de R_M^* où ils sont couplés par le terme $\gamma \Delta T$ correspondant au contraste de viscosité. L'utilisation des relations non linéaires dans (6) et (7) aboutirait à une formulation plus complexe dissociant dans (22) nombre de Rayleigh et nombre de Péclet.

STABILITE GLOBALE

Les équations (18), (19) et (22), qui constituent un modèle cohérent pour des écarts de température ΔT faibles, associées aux conditions aux limites, définissent complètement le problème de stabilité. L'approche utilisée pour apprécier les conditions de stabilité est celle des méthodes énergétiques basées sur l'étude d'une fonctionnelle de Liapounov associée aux équations régissant les perturbations. Nous ne présentons pas ici les détails de mise en place discutés particulièrement par Joseph [18], [22], Davis et von Kerzeck [23], Wankat et Schowalter [24] et Homsy [19]. Après multiplication de (19) par θ et (22) par \mathbf{u} puis intégration sur Ω (notation $\langle \cdot \rangle$) on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \theta^2}{\partial t} \right\rangle &= \langle \theta \nabla^2 \theta \rangle - \left\langle \theta u_3 \frac{\partial T_0}{\partial z} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle P e^* \theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\rangle - \langle \theta \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \rangle \quad (23) \\ 0 &= R_M^* \langle \theta u_3 \rangle - \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle. \end{aligned}$$

En introduisant un paramètre de couplage positif λ entre ces deux équations, et compte tenu des conditions aux limites, on construit une fonctionnelle dont l'étude permet d'apprécier la décroissance éventuelle des perturbations en fonction du temps :

$$\frac{1}{2} \frac{d \langle \hat{\theta}^2 \rangle}{dt} = R_M \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) \hat{\theta} u_3 \right\rangle - \langle |\mathbf{u}|^2 + |\nabla \hat{\theta}|^2 \rangle, \quad (25)$$

avec

$$\hat{\theta} = \sqrt{(R_M^*)} \sqrt{\lambda} \theta = R_M \sqrt{\lambda} \theta. \quad (26)$$

La décroissance des perturbations en fonction du temps sera assurée si $R_M < R_\lambda$, R_λ étant défini par le problème variationnel suivant :

$$R_\lambda^{-1} = \max_H \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) \hat{\theta} u_3 \right\rangle \quad (27)$$

avec la condition :

$$\langle |\mathbf{u}|^2 + |\nabla \hat{\theta}|^2 \rangle = 1. \quad (28)$$

H est l'espace des fonctions \mathbf{u} et $\hat{\theta}$ intégrables sur Ω satisfaisant aux conditions aux limites et à l'équation (18). Les équations d'Euler-Lagrange de ce problème variationnel s'écrivent :

$$\frac{1}{2} R_\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) u_3 + \nabla^2 \hat{\theta} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{1}{2} R_\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) \hat{\theta} \mathbf{e}_3 - \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0}, \quad (30)$$

équation (30) que l'on transforme en en prenant le double rotationnel :

$$-\frac{1}{2} R_\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) \nabla_{xy}^2 \hat{\theta} + \nabla^2 u_3 = 0. \quad (31)$$

Par séparation des variables, on peut effectuer l'étude à partir de perturbations élémentaires de

nombre d'onde a , de la forme :

$$\hat{\theta} = \phi(z, t) \psi(x, y), \quad u_3 = w(z, t) \psi(x, y), \quad (32)$$

$$\nabla_{xy}^2 \psi + a^2 \psi = 0. \quad (33)$$

L'étude de l'équation d'Helmholtz (33) permet de dégager deux cas fondamentaux selon le confinement latéral du milieu poreux :

(a) milieu non confiné latéralement (Ω_H et Ω_c) : le spectre de a^2 est continu,

(b) milieu confiné par la surface adiabatique et imperméable Σ_d : le spectre de a est discret (par exemple dans le cas d'un cylindre de diamètre d : $a^2 = \{13, 56; 37, 31; \dots\}$).

Les équations (29) et (31) pour une perturbation élémentaire, s'écrivent :

$$\frac{1}{2} R_\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) w - a^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{1}{2} R_\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) a^2 \phi - a^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (35)$$

Le paramètre de couplage λ est défini de manière à optimiser le domaine de stabilité globale [19], le critère général de stabilité est de la forme :

$$R_M^* < R_{M,C}^* \quad (36)$$

avec

$$R_{M,C}^* = \left[\min_{a^2} \max_{\lambda} R_\lambda \right]^2.$$

RESOLUTION NUMERIQUE

Le système d'équations (34) et (35) est étudié par une méthode de Galerkin utilisant pour w et ϕ des familles de fonctions satisfaisant aux conditions aux limites :

$$w = \sum_1^N a_n f_n(z) \quad \text{et} \quad \phi = \sum_1^N b_n f_n(z). \quad (38)$$

Dans le cas (a) de la couche Ω_H on utilise de manière classique :

$$f_n(z) = \sin(n\pi z) \quad \text{ou} \quad f_n(z) = z^n(1-z). \quad (39)$$

Dans les cas (b) et (c) des domaines Ω_c et Ω_d une solution identique à Foster [14] a été étudiée :

$$f_n(z) = (bz)^n \exp(-bz), \quad (b > 0). \quad (40)$$

Une discrétisation du type éléments finis à pas non variable a été également employée (Fig. 2), les fonctions d'essai étant définies par :

$$f_n(z) = 1 - \frac{|z - z_n|}{z_n - z_{n-1}}, \quad z \in (z_{n-1}, z_{n+1}), \quad (41)$$

$$f_n(z) = 0, \quad z \notin (z_{n-1}, z_{n+1}). \quad (42)$$

Par multiplication de (34) et (35) par f_n puis intégration sur $[0, \infty[$ on obtient un système linéaire de $2N$ équations :

$$R_\lambda A_{ij} a_j = B_{ij} b_j, \quad (43)$$

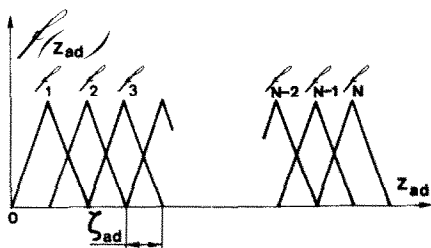


FIG. 2. Fonctions d'essai utilisées dans les cas (b) et (c).

$$R_\lambda a^2 A_{ij} b_j = B_{ij} a_j, \quad (44)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) f_i f_j dz, \quad (45)$$

$$B_{ij} = \int_0^z \left(a^2 f_i f_j - \frac{d^2 f_j}{dz^2} f_i \right) dz. \quad (46)$$

Dans les cas (b) et (c) des domaines Ω_s et Ω_d , les intégrales faisant intervenir le terme $\partial T_0 / \partial z$ sont calculées par voie numérique (règle de Simpson ou méthode de Gauss) en prenant pour la fonction d'erreur les approximations nécessaires. Pour des valeurs données de a^2 et λ , le calcul de R_λ correspondant au problème variationnel (27) se ramène à l'étude d'un problème aux valeurs propres à l'ordre N , la valeur "critique", $R_{M,C}^*$ est ensuite calculée par double itération sur λ et a^2 .

La méthode de Galerkin faisant appel à une suite de fonctions continues du type (39) ou (40) a été appliquée en utilisant jusqu'à 15 fonctions pour assurer une bonne convergence des résultats. Dans le cas des fonctions définies en (40) de manière analogue à Foster [14], une précision raisonnable des résultats a été obtenue en optimisant le choix du paramètre b et le nombre de fonctions utilisées. L'approximation du milieu semi-infini par la discrétisation du type éléments finis est effectuée de la manière suivante:

R_λ pour les milieux (b) et (c) est défini comme la limite numérique lorsqu'on augmente N , de R_λ calculé avec N fonctions; une meilleure approximation est obtenue en diminuant le pas de discrétisation. La Fig. 3

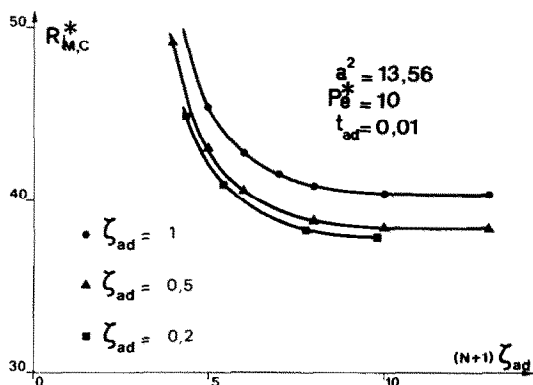


FIG. 3. Exemple d'obtention de la valeur critique avec les fonctions d'essai définies Fig. 2.

illustre sur un exemple la procédure utilisée. L'intégration numérique et la nécessité d'utiliser des matrices d'ordre élevé rendent difficile l'obtention de résultats pour des nombres de Peclet très grands.

RESULTATS

Les résultats obtenus concernant la couche horizontale Ω_H [cas (a)] sont représentés Fig. 4. Ils divergent sensiblement de ceux publiés par Caltagirone [20], ces derniers résultats ayant été obtenus par une méthode de Galerkin basée sur une famille de fonctions non complète [25]. Les conditions critiques définies par nos résultats sont d'autre part plus strictes que celles obtenues par la théorie linéaire [20] ce qui correspond aux résultats attendus de la méthode énergétique. Pour des temps adimensionnels supérieurs à 0,1 on retrouve la valeur classique $4\pi^2$ pour le nombre de Rayleigh critique. Les résultats intermédiaires ayant permis le tracé de la Fig. 4 sont présentés Fig. 5. Ils montrent que la valeur du nombre d'onde a_c correspondant à la perturbation la plus instable est une fonction décroissante du temps. D'autre part, pour des temps faibles, la valeur critique du paramètre R_M^* est peu sensible aux valeurs de a voisines de a_c . Ces remarques, analogues à celles faites lors de travaux antérieurs [20], [26], demeurent valables dans les cas (b) et (c).

Dans le cas (b) du milieu semi-infini Ω_s , les résultats obtenus sont présentés Fig. 4 pour des valeurs faibles du nombre de Peclet. On remarque la convergence des résultats pour des temps adimensionnels inférieurs à 10^{-2} , avec ceux concernant la couche poreuse Ω_H . L'augmentation de l'extension de la zone de mélange thermique mesurée par \sqrt{t} , apparaît comme un facteur déstabilisant; dans le cas où $Pe^* = 0$, on obtient une dépendance linéaire de $R_{M,C}^*$ en fonction de $1/\sqrt{t}$. En ce qui concerne l'influence de l'écoulement sur la stabilité, dans le domaine des nombres de Peclet exploré, elle n'est sensible que sur les valeurs critiques obtenues qui décroissent fortement avec l'augmentation de Pe^* , les résultats généraux restant qualitativement identiques.

La Fig. 6 présente les résultats obtenus dans le cas (c) du domaine Ω_d confiné latéralement par une paroi adiabatique. Les résultats correspondent au cas où Σ_d est un cylindre de diamètre d , les valeurs du nombre d'onde étant alors telles que $a^2 = 13,56; 37,31 \dots$ (d'autres configurations cylindriques peuvent bien entendu être envisagées). Le domaine de stabilité optimal, étant donné la remarque faite précédemment sur le comportement des courbes $R_{M,C}^*(a^2)$, est défini essentiellement à partir de la perturbation de plus grande longueur d'onde possible (telle que $a^2 = 13,56$), mais pour des temps très faibles, toutes les perturbations possibles sont également instables.

Les courbes de la Fig. 6 font apparaître un minimum pour la limite optimale du domaine de stabilité: un confinement latéral du domaine conduit donc à une stabilisation des déplacements étudiés par

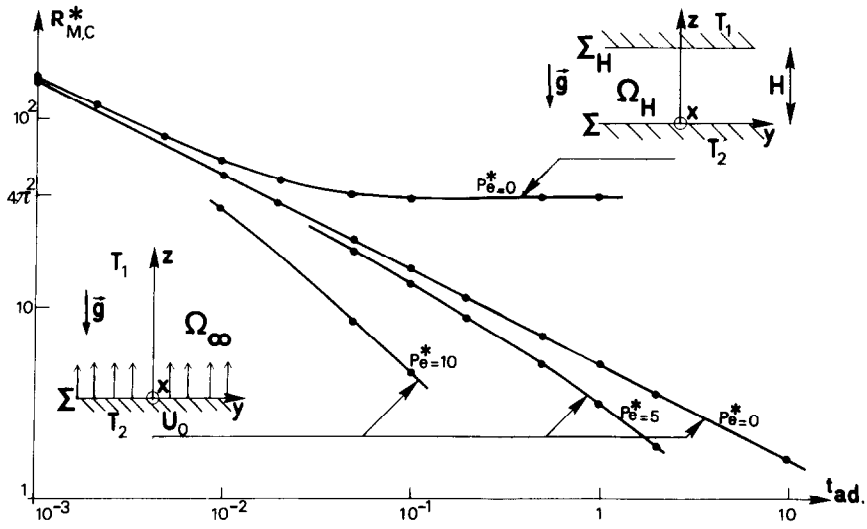


FIG. 4. Valeur critique R^*_{MC} en fonction du temps adimensionnel pour les cas (a) et (b).

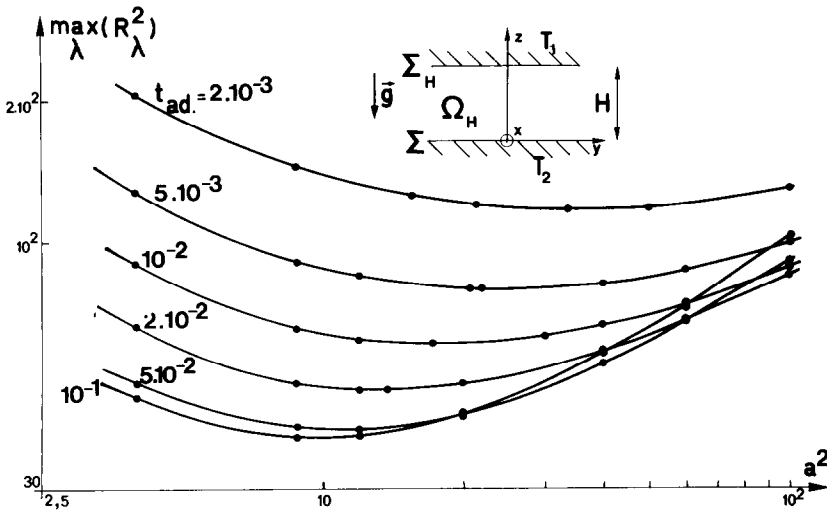


FIG. 5. Evolution des conditions de stabilité en fonction du nombre d'onde et du temps adimensionnel pour le cas (a).

rapport au cas (b). Cette remarque est d'importance: les déplacements dans les milieux non confinés Ω_{∞} , sont à la longue toujours instables et la longueur d'onde des perturbations les plus instables augmente sans cesse; un confinement latéral du domaine fait apparaître une valeur critique du paramètre R^*_M en dessous de laquelle les déplacements réalisés sont inconditionnellement stables. Ce phénomène peut être à l'origine des forts taux de récupération obtenus dans des massifs d'extension latérale faible lors d'expérimentations de laboratoire sur les déplacements miscibles [5].

L'augmentation du nombre de Péclet joue également un rôle déstabilisateur.

CONCLUSION

Les résultats présentés conduisent à estimer les conditions de stabilité des déplacements miscibles en fonction de deux paramètres adimensionnels, les nombres de Rayleigh et Péclet, couplés par l'intermédiaire du contraste des viscosités des fluides en présence. Les résultats obtenus par une méthode de stabilité globale dans le cas d'une couche poreuse de hauteur H soumise à un échelon de température à sa limite inférieure et dans le cas d'un milieu semi-infini, confiné latéralement ou non, dans lequel on injecte à vitesse constante un fluide à température plus élevée, montrent l'effet déstabilisateur du temps et du nombre de Péclet et

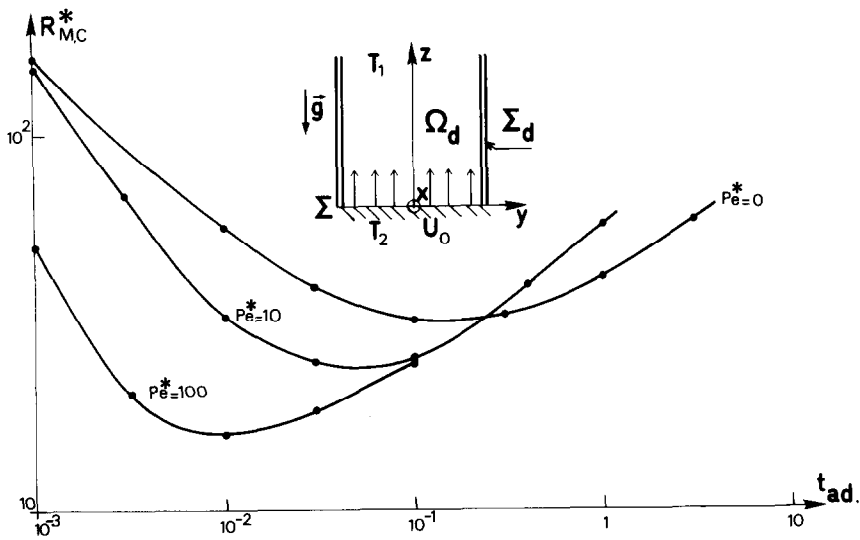


FIG. 6. Domaine optimum de stabilité pour un milieu poreux cylindrique en fonction du temps adimensionnel et du nombre de Péclet [cas (c)].

l'effet stabilisateur d'un confinement latéral du domaine par une paroi adiabatique.

La méthode proposée ne peut par contre aborder la situation correspondant à des instabilités déjà développées, elle ne peut par conséquent pas fournir un modèle de déplacement avec "digitations", tels que ceux recherchés pour des raisons pratiques évidentes et mentionnées dans l'introduction.

Enfin, on ne doit pas perdre de vue le fait que dans les situations pratiques rencontrées, les contrastes des caractéristiques physiques des fluides en présence peuvent être importants, et que l'efficacité des déplacements réalisés est également largement tributaire des hétérogénéités éventuelles du milieu poreux.

Le travail présenté ici, dont les résultats doivent faire l'objet d'une étude expérimentale spécifique, a été effectué dans le cadre d'une action D.G.R.S.T. sur la récupération assistée du pétrole et d'une convention de recherche existant avec l'Institut Français du Pétrole.

REFERENCES

1. E. J. Koval, A method for predicting the performance of unstable miscible displacement in heterogeneous media, *Soc. Pet. Engng J.* **3**, 145-154 (1963).
2. E. L. Dougherty, Mathematical model of an unstable miscible displacement, *Soc. Pet. Engng J.* **3**, 155-163 (1963).
3. A. E. Scheidegger, Stability conditions for displacement processes in porous media, *Can. J. Phys.* **47**(2), 209-214 (1969).
4. H. H. Nguyen et D. F. Bagster, Unstable miscible liquid-liquid displacement in porous media: a new model for predicting displacement performance in homogeneous beds, *Chemical Engng J.* **18**, 103-116 (1979).
5. R. J. Blackwell, J. R. Rayne et W. M. Terry, Factors influencing the efficiency of miscible displacement, *Trans. AIME* **216**, 1-8 (1959).
6. F. M. Sutton, Onset of convection in a porous channel with net through flow, *Phys. Fluids* **13**(8), 1931-1934 (1970).
7. G. M. Homsy et A. E. Sherwood, Convective instabilities in porous media with through flow, *A.I.Ch.E. J.* **22**, 168-174 (1976).
8. R. S. Wu, K. C. Cheng et A. Craggs, Convective instabilities in porous media with maximum density and throughflow effects by finite-difference and finite-element methods, *Numerical Heat Transfer* **3**, 303-318 (1979).
9. R. A. Wooding, Rayleigh instability of a thermal boundary-layer in flow through a porous medium, *J. Fluid. Mech.* **9**, 183-192 (1960).
10. W. Lick, The instability of a fluid layer with time dependent heating, *J. Fluid. Mech.* **21**(3), 565-576 (1965).
11. I. G. Currie, The effect of heating rate on the stability of stationary fluids, *J. Fluid Mech.* **29**(2), 337-347 (1967).
12. P. M. Gresho et R. L. Sani, The stability of a fluid layer subjected to a step change in temperature: transient vs frozen-time analyses, *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 207-221 (1971).
13. T. D. Foster, Stability of a homogeneous fluid cooled uniformly from above, *Phys. Fluids* **8**(7), 1249-1257 (1965).
14. T. D. Foster, Effects of boundary conditions on the onset of convection, *Phys. Fluids* **11**(6), 1257-1262 (1968).
15. T. D. Foster, Onset of manifest convection in a layer of fluid with a time dependent surface temperature, *Phys. Fluids* **12**(12), 2482-2487 (1969).
16. E. G. Malher, R. S. Schechter et E. H. Wissler, Stability of a fluid layer with time dependent density gradients, *Phys. Fluids* **11**(9), 1901-1912 (1968).
17. S. Bachu et G. Dagan, Stability of displacement of a cold fluid by a hot fluid in a porous medium, *Phys. Fluids* **22**(1), 54-59, (1979).
18. D. D. Joseph, Non linear stability of the Boussinesq equations by the method of energy, *Archs. rat. mech. Anal.* **22**, 163-184 (1966).
19. G. M. Homsy, Global stability of time-dependent flows: impulsively heated or cooled fluid layers, *J. Fluid Mech.* **60**(1), 129-139 (1973).

20. J. P. Caltagirone, Stability of a saturated porous layer subject to a sudden rise in surface temperature: comparison between the linear and energy methods, *Q. J. appl. Math.* **33**(1), 47–58 (1980).
21. M. A. Combarrous et S. A. Bories, Hydrothermal convection in saturated porous media, *Advances in Hydrosience*, Vol. 10, pp. 231–307. Academic Press (1975).
22. D. D. Joseph, Stability of fluid motions, Vols. 1 et 2. V. Springer, Berlin (1976).
23. S. H. Davies et C. Von Kerczek, A reformulation of energy stability theory, *Archs. rat. Mech. Anal.* **52**, 112–117 (1973).
24. P. C. Wankat et W. R. Schowalter, Stability of combined heat and mass transfer in a porous medium, *Phys. Fluids* **13**(9), 2418–2420 (1970).
25. J. P. Caltagirone, Instabilités thermoconvectives en milieu poreux, thèse de doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1976).
26. M. Quintard, Stabilité d'une zone de diffusion thermique dans un milieu poreux homogène semi-infini avec écoulement vertical, 7ème symposium International de l'A.I.R.H., Toulouse (1980).

Abstract—A stability analysis, using the energy method and assuming that the Boussinesq's approximations are valid, is presented for time-dependent thermal diffusion zones in a horizontal porous layer or in a semi-infinite medium, possibly bounded by adiabatic and non-permeable side-walls. Numerical computation of stability criterion is obtained by Galerkin's method. Rayleigh–Benard and Saffman–Taylor instabilities, due respectively to temperature-induced density and viscosity variations are taken into account. Influence of vertical, constant-rate flow with low Peclet number is considered in the case of a semi-infinite medium, possibly bounded with cylindrical adiabatic walls.

INSTABILITÄTEN VON ZEITABHÄNGIGEN THERMISCHEN DIFFUSIONSZONEN IN EINEM PORÖSEN MEDIUM

Zusammenfassung — Unter Verwendung der Energiebilanz-Methode und mit der Annahme, daß die Boussinesq-Näherung gültig ist, wird eine Stabilitätsanalyse für zeitabhängige thermische Diffusionszonen in einer horizontalen porösen Schicht oder in einem halbbunendlichen Medium durchgeführt, die durch adiabate und nichtpermeable Seitenwände begrenzt sein können. Durch Anwendung des Galerkin-Verfahrens wird das Stabilitätskriterium numerisch berechnet. Es werden Instabilitäten nach Rayleigh–Bénard und Saffmann–Taylor berücksichtigt, die durch temperaturbedingte Dichte bzw. Viskositätsänderungen bedingt sind. Für den Fall eines halbbunendlichen Mediums, das durch zylindrische adiabate Wände begrenzt sein kann, wird der Einfluß von vertikaler Strömung mit konstantem Massenstrom bei niedriger Peclet-Zahl betrachtet.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗОН ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Аннотация — Основанный на энергетическом методе анализ устойчивости, при использовании которого предполагается справедливость приближений Буссинеска, применен для исследования нестационарных зон тепловой диффузии в горизонтальном пористом слое или в полубесконечной среде, ограниченной адиабатическими и непроницаемыми боковыми стенками. Критерий устойчивости рассчитывается численно методом Галеркина. При расчете учитываются неустойчивости Релея–Бенара и Саффмана–Тейлора, возникающие соответственно вследствие температурных изменений плотности и вязкости. Влияние вертикального течения с постоянной скоростью и малым числом Пекле учитывается в случае полубесконечной среды, ограниченной цилиндрическими адиабатическими стенками.